Ueber

die Beziehung des Riemann'schen Integrals zweiter Gattung

zu den

Periodicitätsmoduln der Function $R(o|\varepsilon)$.

Inauguraldissertation,

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Facultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Otto PAULS

aus Montjoie.

ACAD. LUG. BAT. BIBL.

Strassburg,

Buchdruckerei R. Schultz und Comp.

1882.

Ueber die

Beziehung des Riemann'schen Integrals zweiter Gattung

zu den Periodicitätsmoduln der Function $R(o|\varepsilon)$.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich zunächst mit den Vereinfachungen, welche sich für die Darstellung des RIEMANN'schen Integrals zweiter Gattung und seine Anwendungen ergeben, wenn man der Herleitung dieser Function nicht, wie früher üblich, das Integral dritter Gattung, sondern die von Herrn Professor CHRISTOFFEL eingeführte Function $R(*)$ zu Grunde legt.

Das bekannte Verfahren der Integration über das Querschnittsystem der RIEMANN'schen Fläche T liefert bei passender Wahl der in dem Integral zweiter Gattung $t(o|\varepsilon)$ enthaltenen additiven Constante die Formel:

$$t(o|\varepsilon) = \psi(\varepsilon|o) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\mu=1}^{p} u'_\mu(\varepsilon)\mathfrak{A}_\mu(o);$$

wo 1) ψ rationale Function der Coordinaten z, s des variabeln Punktes o und der Coordinaten ζ, σ des Unstetigkeitspunktes ε ist; 2) $u'_\mu(\varepsilon)$ ist der μte Normalintegrand erster Gattung für den Punkt ε, und, wenn o durch ε ersetzt wird, sind $\mathfrak{A}_1(\varepsilon)$, $\mathfrak{A}_2(\varepsilon), \ldots . \mathfrak{A}_p(\varepsilon)$ die Periodicitätsmoduln der Function $R(o|\varepsilon)$ für die Querschnitte $a_1\ a_2 \ldots a_p$.

Von dem rein algebraischen Gliede $\psi(\varepsilon|o)$ abgesehen, sind also in diesem Ausdruck der Function $t(o|\varepsilon)$ die Variablen z, ζ von einander getrennt, in der Weise, dass die einzigen transscendenten Functionen $\mathfrak{A}_1(o)$, $\mathfrak{A}_2(o); \ldots . \mathfrak{A}_p(o)$, welche in unsern Ausdruck eingehen, von ζ unabhängig, also für alle Lagen des Punktes ε die nämlichen sind.

(*) Siehe unten § 1, und *Annali di Matematica*, Serie II^a, Band IX, Seite 97—99.

Auf diesem Umstande beruht die Brauchbarkeit der vorstehenden Formel. So wird durch dieselbe der RIEMANN'sche Ausdruck

$$S = C_0 + C_1 t(o|\varepsilon_1) + C_2 t(o|\varepsilon_2) + \ldots .$$

einer algebraischen, wie die Fläche T verzweigten Function S von z aus der transscendenten in die rein algebraische Form

$$S = C_0 + C_1 \psi(\varepsilon_1|o) + C_2 \psi(\varepsilon_2|o) + \ldots .$$

(§ 7) übergeführt.

Damit ist eine neue Ausdrucksform für diese Functionen S gefunden, nebst dem Satze, dass p Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten von S ausreichen, damit dieser Ausdruck in den n unendlich fernen Punkten von T stetig bleibt, während dort jedes einzelne Glied unendlich zur Ordnung $m-1$ wird. Als Beispiel hierzu wird für die bekannte Function S von der Ordnung $p+1$ der vollständige Ausdruck nebst den Bedingungen für die Existenz dieser Function hergeleitet.

Für das volle Verständniss der obigen Formel, durch welche die transscendente Function $t(o|\varepsilon)$ von z auf die vom Parameter ζ unabhängigen Transscendenten $\mathfrak{A}_\mu(o)$ zurückgeführt wird, ist es notwendig, diese neuen Transscendenten auf ihre charakteristischen Eigenschaften zu untersuchen.

Mit dieser Untersuchung beschäftige ich mich im zweiten Theile der Arbeit. Es findet sich, dass innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche T' diese Function $\mathfrak{A}_\mu(o)$ einwertig ist und nur im Unendlichen unstetig wird: in jedem unendlich fernen Punkte wird sie ∞^{m-1} ohne logarithmische Unstetigkeit. Ausserdem ist sie stetig an allen Querschnitten mit Ausnahme des Querschnittes b_μ, wo sie den Periodicitätsmodul $-2\pi i$ hat. Daraus folgt, dass die Derivirte von $\mathfrak{A}_\mu$ eine algebraische, wie die Fläche T verzweigte Function von z ist, was sich an dem Ausdruck von $\mathfrak{A}_\mu(o)$ als bestimmtes Integral nicht unmittelbar zu erkennen gibt.

Diese Resultate übertragen sich sofort auf die Functionen $\mathfrak{B}_1(o), \mathfrak{B}_2(o), \ldots . \mathfrak{B}_p(o)$ von z, welche den übrigen Periodicitätsmoduln von R entsprechen. Dies führt zur Einsicht, dass in beiden Fällen die charakteristischen Eigenschaften einer ganzen Classe von Functionen $\mathfrak{C}$ vorliegen, welche entstehen, wenn das $\int dR(o|\varepsilon)$ in der ursprünglichen Fläche T über einen beliebigen Ringweg r erstreckt wird.

Zu dieser Classe gehören zunächst die Functionen $\mathfrak{B}_1(o), \mathfrak{B}_2(o), \ldots . \mathfrak{B}_p(o)$ und, wenn ihr Vorzeichen geändert wird, auch die Functionen $\mathfrak{A}_1(o), \mathfrak{A}_2(o), \ldots . \mathfrak{A}_p(o)$. Diese $2p$ Functionen sind linear unabhängig, was aus ihrer Einwertigkeit in der Fläche T' nebst den Werten ihrer Periodicitätsmoduln folgt. Durch sie lassen sich alle übrigen Functionen $\mathfrak{C}(o)$ linear ausdrücken. Die Herstellung dieser Beziehung und die Aufklärung eines auffallenden scheinbaren Widerspruchs, den dieselbe darbietet, bildet den Schluss meiner Arbeit. —

Die obige Formel für die Function $t(o|\varepsilon)$ steht in naher Beziehung zu einem Ausdruck, der sich bereits in dem Werke von CLEBSCH und Herrn GORDAN (*) findet, nämlich zu der auf Seite 120 stehenden Formel

$$(11)\quad \int_{\alpha}^{\beta} dZ_{\xi} = -\left(\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x}\right)_{\xi} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{h=1}^{p} \overset{(h)}{S}_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)_{\xi}.$$

Die linke Seite dieser Formel, nämlich das

$$\int_{\alpha}^{\beta} dZ_{\xi} = \int_{\alpha}^{\beta} d\left(\frac{\partial \Pi_{\xi\zeta}}{\partial \xi}\right)$$

würde in unserer Schreibweise als eine Differenz,

$$t(\beta|\xi) - t(\alpha|\xi),$$

zu bezeichnen sein, während $\overset{(h)}{S}_{\alpha\beta}$ den h ten Periodicitätsmodul des Integrals $S_{\alpha\beta}$ bedeutet, und dieses letztere bis auf ein additives Integral erster Gattung einer Differenz $R(x|\alpha) - R(x|\beta)$ gleich ist.

Der Uebergang von unserer Formel zur vorstehenden ist demnach klar. Der vollständigen Durchführung der Aufgabe, aus der obigen Formel (11) auch umgekehrt zu einer der unserigen gleichbedeutenden zu gelangen, stehen dagegen beträchtliche Schwierigkeiten im Wege. Es möge darüber folgendes bemerkt sein :

Zunächst ist nicht daran zu denken, dass man, wie auf der linken, so auch auf der rechten Seite dieser Formel die Punkte α, β von einander scheidet, nämlich nicht durch Einmischung eines dritten Punktes ζ, sondern durch wirkliche Zerfällung des algebraischen Ausdrucks für

$$\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x}$$

(Seite 20—22 des genannten Werkes) in zwei Theile, so dass der eine nur von x und α, nicht auch noch von β, der andere nur von x und β, nicht auch von α abhängt, und keiner von beiden einen der Aufgabe fremden Punkt ζ enthält. Die genuine Scheidung dieser Punkte α und β wird in einem spätern Abschnitte des genannten Werkes, aber nur für ein Aggregat $T_{\alpha\beta}$ von Integralen dritter Gattung durchgeführt.

Statt dessen könnte man nun, ähnlich, wie im § 3 der vorliegenden Arbeit, zu einer definitiven Normirung von $t(\beta|\xi)$ gelangen, indem man hierfür ein arithmetisches Mittel

$$\frac{1}{\mu}\left\{\int_{\alpha_1}^{\beta} dZ_{\xi} + \int_{\alpha_2}^{\beta} dZ_{\xi} + \ldots + \int_{\alpha_\mu}^{\beta} dZ_{\xi}\right\}$$

(*) CLEBSCH-GORDAN: *Theorie der Abel'schen Functionen.*

einführt, wo aber die Lage der Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_\mu$ sich nicht mit β ändern darf. Eine solche Definition der Function $t(\beta|\xi)$ ist unbedingt zulässig, aber damit nun auch der Ausdruck dieser Function zum Abschluss gebracht wird, müssen die arithmetischen Mittel aus den Werthen von $S_{\alpha\beta}$ und $S^{(h)}_{\alpha\beta}$, welche in ihm auftreten, ausgerechnet werden, was durchaus davon abhängt, wie man die ganze Zahl μ und die Punkte α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_\mu$ annimmt.

Unser Ausdruck für $t(o|\varepsilon)$ verlangt derartige nachträgliche Ausrechnungen nicht; er ist von der obigen Gleichung (11) durchaus verschieden, da eine Ueberführung der letzteren in eine mit der unsern wirklich äquivalente Formel wegen der Unausführbarkeit der erforderlichen Operationen nicht gelingt.

Strassburg, 14. Februar 1882.

Erste Abtheilung.

Das Normalintegral zweiter Gattung.

§ 1.

Wir bezeichnen in üblicher Weise durch:

$$F(\overset{n}{s}\,|\,\overset{m}{z}) = a\,s^n + a_1\,s^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

eine irreduktible Gleichung zwischen z und s, durch T die zugehörige RIEMANN'sche Fläche, und durch o den veränderlichen Punkt, welcher dem Wertepaar z, s zugeordnet ist. Wo im Folgenden von Punkten $\varepsilon\ \varepsilon_k\ o'$ der Fläche T die Rede ist, sollen die zugehörigen Werthe von z, s stets durch $\zeta\ \sigma$; $\zeta_k\ \sigma_k$; $z'\ s'$, bezeichnet werden, falls eine solche Bezeichnung nöthig werden sollte.

In Bezug auf das Polynom F sei vorausgesetzt, dass die in der Aufsuchung der Doppelpunkte von s bestehende Fundamentalaufgabe gelöst ist. Die Anzahl der Doppelpunkte bezeichnen wir mit RIEMANN durch r, es sei in diesen Punkten:

$$z,\ s = \gamma_\rho,\ \delta_\rho \text{ für } \rho = 1, 2, \ldots r;$$

Unterwirft man nun eine ganze Function

$$\Phi_\rho(\overset{n-2}{s}\,|\,\overset{m-2}{z})$$

der Bedingung, dass sie in dem Doppelpunkte γ_ρ, δ_ρ gleich 1, in jedem andern Doppelpunkte gleich Null werden soll, so ergeben sich zwischen den $(m-1)\ (n-1) = p + r$ Coefficienten dieser Function r Gleichungen, welche nach einem bekannten Fundamentalsatze die Auflösung nach mindestens einer Gruppe von r Coefficienten gestatten, so dass noch p Coefficienten willkürlich bleiben. Diese setzen wir der Einfachheit halber gleich Null. Man erhält r solcher Functionen Φ_ρ; mittelst dieser bilde man eine Function

$$\psi(o\,|\,\varepsilon),$$

deren Ausdruck sich aus folgender Formel ergibt

1. $$\psi(o\,|\,\varepsilon)F'(s\,|\,z) = -\frac{F(s\,|\,\zeta)}{(s-\sigma)(z-\zeta)} - \frac{1}{n}\frac{F'(s\,|\,z) - F'(s\,|\,\zeta)}{z-\zeta}$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{r}\left[\frac{F(\gamma_\rho\,|\,\zeta)}{(\gamma_\rho-\sigma)(\delta_\rho-\zeta)} - \frac{1}{n}\cdot\frac{F'(\gamma_\rho\,|\,\zeta)}{\delta_\rho-\zeta}\right]\Phi_\rho(s\,|\,z);$$

wo:

$$F'(s\,|\,z) = \frac{\partial F(s\,|\,z)}{\partial s}$$

die partielle Derivirte bedeutet.

Dies ist der vollständig ausgeführte Ausdruck für die in der Einleitung erwähnte Function ψ; die Function R ist ihr Integral:

II. $$R(o\,|\,\varepsilon) = \int \psi(o\,|\,\varepsilon)\,dz.$$

In seinen Vorlesungen pflegt Herr Professor CHRISTOFFEL beide Ausdrücke mit entgegengesetztem Zeichen zu benutzen.

Als Function von z wird nun zunächst $\psi(o\,|\,\varepsilon)$ unstetig nur in ε, wo

$$\psi(o\,|\,\varepsilon) = -\frac{1}{z-\zeta} + \text{funct. cont.}$$

ist, und in den Verzweigungspunkten, wo aber ihr Integral stetig bleibt. In jedem unendlich fernen Punkte der Fläche T wird:

$$\psi(o\,|\,\varepsilon) + \frac{1}{nz} = 0^2.$$

Als Function von ζ wird ψ, ausser in o, nur noch in den unendlich fernen Punkten der Fläche T unstetig, dort wird ψ unendlich zur Ordnung $m-1$.

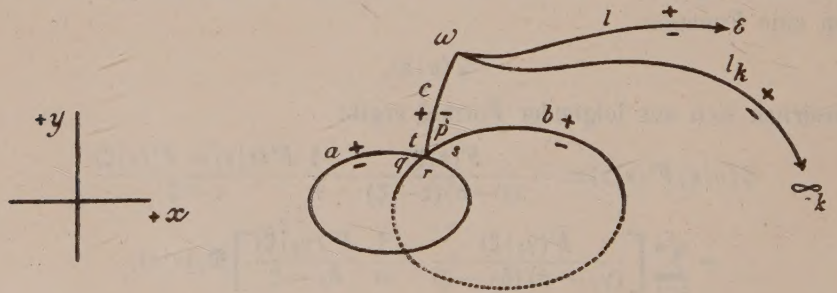
Für die Function $R(o\,|\,\varepsilon)$ von z folgt hieraus, dass sie nur in ε und den unendlich fernen Punkten $\infty_1\ \infty_2 \ldots\ \infty_n$ der Fläche T unendlich wird, und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon: \quad R(o\,|\,\varepsilon) = -\log(z-\zeta) + \text{funct. cont. mon.}$$

$$\text{in } \infty_1\ \infty_2 \ldots\ \infty_n: \quad R(o\,|\,\varepsilon) = \frac{1}{n}\log\frac{1}{z} + \text{funct. cont. mon.}$$

Diese Function R ist hiernach einwertig in derjenigen Fläche T'', welche wie folgt entsteht:

Man verwandle T zunächst mittelst der RIEMANN'schen Querschnittbündel c, a, b in eine einfach zusammenhängende Fläche T' und ziehe dann in dieser, um die Fläche T'' zu erhalten, aus dem Punkte ω, von dem die Schnitte c ausgehen, Sperrlinien $l\,l_1\,l_2 \ldots l_n$ nach den Punkten $\varepsilon\ \infty_1\ \infty_2 \ldots\ \infty_n$



Die Ränder dieser Schnitte werden so bezeichnet, dass ein positiver Umlauf um den Endpunkt von der negativen Seite des betreffenden Schnittes auf die positive Seite führt. Bei den Querschnitten gelte die Bezeichnung RIEMANN's. Wegen der Benennung der fünf Ecken, die sich dort bilden, wo die Schnitte c, a, b zusammentreffen, möge auf vorstehende Figur verwiesen werden.

Wenn nun die bestimmten Integrale:

III.
$$\int \left| \begin{matrix} s \\ b \\ r \end{matrix} \right|_\nu dR(o\,|\,\varepsilon) = \mathfrak{A}_\nu(\varepsilon);$$
$$\int \left| \begin{matrix} q \\ a \\ r \end{matrix} \right|_\nu dR(o\,|\,\varepsilon) = \mathfrak{B}_\nu(\varepsilon);$$

gesetzt werden, so folgt, wie an der in der Einleitung angeführten Stelle

1) dass R innerhalb T'' einwertig und von jeder Unstetigkeit frei ist, weil die logarithmischen Unstetigkeiten in der Begrenzung von T'' eintreten;

2) dass

$$\overset{+}{R} - \overset{-}{R} = \left\| \begin{matrix} \text{an} \\ \mathfrak{A}_\nu(\varepsilon) \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_\nu \\ \mathfrak{B}_\nu(\varepsilon) \end{matrix} \left| \begin{matrix} b_\nu \\ o \end{matrix} \right| \begin{matrix} c_\nu \\ l \\ -2\pi i \end{matrix} \left| \begin{matrix} l_k\ (k=1,2\ldots n) \\ +\frac{2\pi i}{n} \end{matrix} \right.$$

ist, während

3) zwischen den Periodicitätsmoduln die Relation:

IV.
$$\pi i \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) = \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon) - 2\pi i \left[u_\mu(\varepsilon) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_\mu(\infty_k) \right]$$

besteht.

Weiterhin ergibt sich hieraus, dass:

V.
$$T(o\,|\,\varepsilon) = \frac{dR(o\,|\,\varepsilon)}{d\zeta} = \int \frac{d\psi(o\,|\,\varepsilon)}{d\zeta} dz$$

ein Integral zweiter Gattung im Sinne RIEMANN's ist mit dem Unstetigkeitspunkt ε, und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon: \quad T(o\,|\,\varepsilon) = \frac{1}{z-\zeta} + \text{funct. cont.}$$

Sonst ist diese Function innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche T' allenthalben stetig und überdies einwertig.

Setzt man:

$$\frac{d\mathfrak{A}_\nu(\varepsilon)}{d\zeta} = \mathfrak{A}'_\nu(\varepsilon); \qquad \frac{d\mathfrak{B}_\nu(\varepsilon)}{d\zeta} = \mathfrak{B}'_\nu(\varepsilon),$$

und
$$\frac{du_\mu(o)}{dz} = u'_\mu(o),$$

so ist:

$$\text{an } a_\lambda: \quad \overset{+}{T} - \overset{-}{T} = \mathfrak{A}'_\lambda(\varepsilon);$$

$$\text{an } b_\lambda: \quad \overset{+}{T} - \overset{-}{T} = \mathfrak{B}'_\lambda(\varepsilon);$$

weiterhin:

VI. $$\pi i \cdot \mathfrak{B}'_\mu(\varepsilon) = \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}'_\lambda(\varepsilon) - 2\pi i u'_\mu(\varepsilon).$$

§ 2.

Nachdem dies in Erinnerung gebracht ist, bilden wir die Function:

$$P = \int T(o|\delta)\, dR(o|\varepsilon) = \int T(o|\delta)\, \psi(o|\varepsilon)\, dz.$$

Dieselbe hat logarithmische Unstetigkeiten nur in den Punkten δ, ε und in den n unendlich fernen Punkten von T, und zwar ist das Gewicht der Unstetigkeit

1) im Punkte δ gleich $\psi(\delta|\varepsilon)$;
2) » » ε » $-T(\varepsilon|\delta)$;
3) » » ∞_k » $\frac{1}{n} T(\infty_k|\delta)$; $(k = 1\ 2 \ldots n)$.

Das Integral

$$J = \int_{(T')} T(o|\delta)\, dR(o|\varepsilon),$$

in positiver Richtung um die Fläche T' erstreckt, ist aber gleich dem Produkt aus $2\pi i$ in die Summe der Gewichte aller logarithmischen Unstetigkeiten von P, also:

$$J = 2\pi i \left\{ \psi(\delta|\varepsilon) - T(\varepsilon|\delta) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T(\infty_k|\delta) \right\}.$$

Andererseits liefert die Integration über die Querschnitte in bekannter Weise:

$$J = \sum_{\mu=1}^{p} \left(\mathfrak{A}'_\mu(\delta)\, \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) - \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)\, \mathfrak{B}'_\mu(\delta) \right),$$

und wir haben demnach die Gleichung:

VII. $$2\pi i \left\{ \psi(\delta|\varepsilon) - T(\varepsilon|\delta) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T(\infty_k|\delta) \right\} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{p} \left(\mathfrak{A}'_\mu(\delta)\, \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) - \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)\, \mathfrak{B}'_\mu(\delta) \right).$$

§ 3.

Die Formeln IV und VII vereinfachen sich bedeutend, wenn wir von dem Umstande Gebrauch machen, dass sowohl u_μ als T eine additive, von z unabhängige, im Uebrigen verfügbare Grösse enthält.

Um dieses bei u_μ zum Ausdruck zu bringen, werde gesetzt:

$$u_\mu(o) = \int_\alpha^o du_\mu - c_\mu,$$

wo α irgend ein Punkt von T' sein soll. Dann wird die in IV vorkommende Summe:

$$\frac{1}{n}\sum_k u_\mu(\infty_k) = \frac{1}{n}\sum_k \int_\alpha^{\infty_k} du_\mu - c_\mu.$$

Die Constante c_μ bestimmen wir so, dass:

$$\sum_{k=1}^{n} u_\mu(\infty_k) = 0$$

wird, also:

$$c_\mu = \frac{1}{n}\sum_k \int_\alpha^{\infty_k} du_\mu$$

und demnach:

$$\text{(A)} \qquad u_\mu(o) = \int_\alpha^o du_\mu - \frac{1}{n}\sum_k \int_\alpha^{\infty_k} du_\mu.$$

Ebenso verfahren wir bei $T(o|\varepsilon)$ und setzen:

$$\text{(B)} \qquad T(o|\varepsilon) = \int_\alpha^o dT(o|\varepsilon) - \frac{1}{n}\sum_k \int_\alpha^{\infty_k} dT(o|\varepsilon).$$

Bei $T(o|\varepsilon)$ ist nun also, genau wie bei u_μ die additive Constante in der Weise bestimmt, dass die Summe der n Werte, welche die Function für $z = \infty$ erlangt, Null ist.

Es ist ausdrücklich hervorzuheben, dass diese Bestimmung der Constanten auf die Periodicitätsmoduln von u_μ und $T(o|\varepsilon)$ keinen Einfluss hat.

Unter diesen Festsetzungen geht die Gleichung IV über in die folgende:

$$\text{(C)} \qquad \pi i \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) = -2\pi i . u_\mu(\varepsilon) + \sum_\lambda a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon);$$

Gleichung VII verwandelt sich in:

$$2\pi i \Big[\psi(\delta|\varepsilon) - T(\varepsilon|\delta)\Big] = \sum_\mu \begin{vmatrix} \mathfrak{A}'_\mu(\delta) & \mathfrak{B}'_\mu(\delta) \\ \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon) & \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) \end{vmatrix}.$$

Zur weiteren Vereinfachung benutzen wir rechts die Werte:

$$\mathfrak{B}'_\mu(\delta) = -2u'_\mu(\delta) + \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}'_\lambda(\delta),$$

$$\mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) = -2u_\mu(\varepsilon) + \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon),$$

welche sich aus (C) ergeben, so dass die Summe in die beiden Glieder:

$$-2\sum_{\mu}\begin{vmatrix}\mathfrak{A}'_\mu(\delta)\,u'_\mu(\delta)\\ \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)\,u_\mu(\varepsilon)\end{vmatrix}\text{ und }\frac{1}{\pi i}\sum_{\mu}\sum_{\lambda}a_{\lambda\mu}\begin{vmatrix}\mathfrak{A}'_\mu(\delta)\,\mathfrak{A}'_\lambda(\delta)\\ \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)\,\mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon)\end{vmatrix}$$

zerfällt. Die Doppelsumme ist aber gleich Null, denn, wenn man λ mit μ vertauscht, ändert jedes Glied der Summe nur sein Vorzeichen, während der Wert der vollständigen Summe ungeändert bleibt, da λ und μ bei der Summation dieselben Werte durchlaufen.

Es folgt:

$$2\pi i\Big[\psi(\delta\,|\,\varepsilon)-T(\varepsilon\,|\,\delta)\Big]=-2\sum_{\mu}\begin{vmatrix}\mathfrak{A}'_\mu(\delta)\,u'_\mu(\delta)\\ \mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)\,u_\mu(\varepsilon)\end{vmatrix};$$

also auch:

$$\psi(\delta\,|\,\varepsilon)-\frac{1}{\pi i}\sum_{\mu}u'_\mu(\delta)\,\mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)=T(\varepsilon\,|\,\delta)-\frac{1}{\pi i}\sum_{\mu}\mathfrak{A}'_\mu(\delta)\,u_\mu(\varepsilon).$$

§ 4.

Mit Rücksicht auf die vorstehende Formel setzen wir nunmehr:

$$(1)\qquad t(o\,|\,\varepsilon)=T(o\,|\,\varepsilon)-\frac{1}{\pi i}\sum_{\mu}\mathfrak{A}'_\mu(\varepsilon)\,u_\mu(o);$$

dann geht diese Formel über in:

$$\psi(\delta\,|\,\varepsilon)-\frac{1}{\pi i}\sum_{\mu}u'_\mu(\delta)\,\mathfrak{A}_\mu(\varepsilon)=t(\varepsilon\,|\,\delta);$$

somit folgt auch, wenn ε durch o und hierauf δ durch ε ersetzt wird:

$$(2)\qquad t(o\,|\,\varepsilon)=\psi(\varepsilon\,|\,o)-\frac{1}{\pi i}\sum_{\mu}u'_\mu(\varepsilon)\,\mathfrak{A}_\mu(o).$$

Als Function von z hat $t(o\,|\,\varepsilon)$ wegen der Gleichung (1) die folgenden Eigenschaften:

1) In der einfach zusammenhängenden Fläche T' ist $t(o\,|\,\varepsilon)$ einwertig und bis auf den Punkt ε allenthalben stetig; in ε ist:

$$t(o\,|\,\varepsilon)=\frac{1}{z-\zeta}+\text{ funct. cont.}$$

2) Die Summe der n Werte, welche die Function in den n unendlich fernen Punkten der Fläche T' erlangt, ist gleich Null.

3) An den Querschnitten hat die Function $t(o\,|\,\varepsilon)$ constante Periodicitätsmoduln, und zwar ist mit Rücksicht auf VI (§ 1) und die Periodicitätsmoduln von u_μ:

$$\text{an } a_\lambda:\quad \overset{+}{t}-\overset{-}{t}=o;$$

$$\text{an } b_\lambda:\quad \overset{+}{t}-\overset{-}{t}=-2u'_\lambda(\varepsilon).$$

Also ist $t(o|\varepsilon)$ als Function von z das Normalintegral zweiter Gattung für den Unstetigkeitspunkt ε, wobei jedoch darauf zu achten ist, dass hier auch noch über die additive Constante verfügt ist, welche bei der RIEMANN'schen Definition des Normalintegrals zweiter Gattung disponibel bleibt. Aus diesem Grunde dürfte es angebracht sein, zu zeigen, wie sich unsere Function $t(o|\varepsilon)$ mit Hülfe der RIEMANN'schen ϑ-function ausdrückt.

§ 5.

Zu dem Ende gehen wir aus vom Integral:

$$P = \int R(o|\delta)\, d\, \log \vartheta\Big((u_\mu(o) - e_\mu)\Big);$$

wo:
$$e_\mu = \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu;$$

und:
$$K_\mu = \frac{1}{2}\Big[\pi i + a_{\mu\mu}\Big] + \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \neq \mu} \int \Big|\begin{matrix} s \\ b \\ r \end{matrix}\Big|_{\lambda}^{+} u_\mu\, d\, u_\lambda$$

ist. Die Punkte $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots . \varepsilon_p$ setzen wir unbeschränkt variabel voraus, so dass, wenn man will, für ϑ der Ausdruck durch die unendliche Reihe RIEMANN's benutzt werden kann.

Die angewandte ϑ-function wird Null in den p Punkten ε, jedes Mal zur ersten Ordnung.

An den Querschnitten ist:

$$\text{an } a_\lambda: \quad \overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta};$$

$$\text{an } b_\lambda: \quad \overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}.e^{-a_{\lambda\lambda} - 2(\overset{-}{u}_\lambda - e_\lambda)};$$

also

$$\text{an } a_\lambda: \quad \log \overset{+}{\vartheta} = \log \overset{-}{\vartheta} - 2 h_\lambda \pi i;$$

$$\text{an } b_\lambda: \quad \log \overset{+}{\vartheta} = \log \overset{-}{\vartheta} - a_{\lambda\lambda} - 2(\overset{-}{u}_\lambda - e_\lambda) + 2 g_\lambda \pi i;$$

g_λ und h_λ sind hier ganze Zahlen.

Innerhalb der Fläche T'' wird das Integral P unstetig nur in den Nullpunkten der ϑ-function, den Punkten $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots . \varepsilon_p$, da $R(o|\delta)$ innerhalb T'' stetig ist. In dem Punkte ε_k wird P logarithmisch unstetig, und das Gewicht dieser Unstetigkeit ist gleich $R(\varepsilon_k|\delta)$.

Das positiv um die Fläche T'' erstreckte Integral:

$$J = \int_{(T'')} R(o|\delta)\, d \log \vartheta,$$

welches gleich ist dem Produkte aus $2\pi i$ in die Summe der Gewichte aller logarithmischen Unstetigkeiten von P innerhalb T'', findet sich also gleich:

$$J = 2\pi i \,.\, \sum_{k=1}^{p} R(\varepsilon_k \,|\, \delta).$$

Die Integration über die Querschnitte liefert:

$$J = \sum_{\lambda} \mathfrak{A}_\lambda(\delta) \,.\, \Big\{ - a_{\lambda\lambda} - 2\,u_\lambda(r_\lambda) + 2\,e_\lambda + 2\,g_\lambda\,\pi i \Big\}$$

$$+ \sum_{\lambda} \left\{ \mathfrak{B}_\lambda(\delta)\, 2\,h_\lambda\,\pi i + 2 \int \left| \begin{matrix} s \\ b \\ r \end{matrix} \right| \overset{+}{R}_\lambda(o \,|\, \delta)\, d\,u_\lambda(o) \right\}$$

$$- 2\,\pi i \log \mathfrak{I}\Big((u_\mu(\delta) - e_\mu) \Big) + \frac{2\,\pi i}{n} \sum_{g=1}^{n} \log \mathfrak{I}\Big((u_\mu(\infty_g) - e_\mu) \Big).$$

Setzt man beide Ausdrücke für J einander gleich, hebt mit $2\pi i$ weg und differentiirt nach ζ_k, dem Werte von z in ε_k, so ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{d\,e_\lambda}{d\,\zeta_k} = w'_\lambda(\varepsilon_k)$$

ist, die folgende Relation:

$$\psi(\varepsilon_k \,|\, \delta) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda} \mathfrak{A}_\lambda(\delta)\, w'_\lambda(\varepsilon_k) =$$

$$= - \frac{d}{d\,\zeta_k} \log \mathfrak{I}\Big((u_\mu(\delta) - e_\mu) \Big) + \frac{1}{n} \,.\, \frac{d}{d\,\zeta_k} \sum_{g=1}^{n} \log \mathfrak{I}\Big((u_\mu(\infty_g) - e_\mu) \Big).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nach Gleichung (2) des vorangehenden Abschnitts gleich $t(\delta \,|\, \varepsilon_k)$; ersetzt man δ durch o, so folgt:

$$t(o \,|\, \varepsilon_k) = \frac{1}{n} \frac{d}{d\,\zeta_k} \log \frac{\prod_{g=1}^{n} \mathfrak{I}\Big((u_\mu(\infty_g) - e_\mu) \Big)}{\Big[\mathfrak{I}\Big((u_\mu(o) - e_\mu) \Big) \Big]^n}.$$

Dieser Ausdruck hängt also ausser von der Lage des Punktes ε_k auch von der Lage der übrigen Punkte ε ab. Wir bilden nun $t(o \,|\, \varepsilon_k)$ für $k = 1, 2 \ldots p$ und addiren. Alsdann lassen wir die p Punkte ε_k in einem, wie o unbeschränkt veränderlichen Punkte ε zusammenfallen, wobei sämmtliche $t(o \,|\, \varepsilon_k)$ in $t(o \,|\, \varepsilon)$ übergehen, und

$$e_\mu = p \,.\, u_\mu(\varepsilon) - K_\mu$$

wird; es folgt:

$$p \,.\, t(o \,|\, \varepsilon) = \frac{1}{n} \frac{d}{d\,\zeta} \log \frac{\prod_{g=1}^{n} \mathfrak{I}\Big((u_\mu(\infty_g) - p\,u_\mu(\varepsilon) + K_\mu) \Big)}{\Big[\mathfrak{I}\Big((u_\mu(o) - p\,u_\mu(\varepsilon) + K_\mu) \Big) \Big]^n},$$

woraus man den verlangten Ausdruck für $t(o \,|\, \varepsilon)$ durch Division mit p erhält.

Der Ausdruck für das zum Unstetigkeitspunkt ε gehörige nicht normirte Integral zweiter Gattung (das Normalintegral zweiter Gattung im Sinne RIEMANN's) ist demnach bis auf eine additive von z unabhängige Grösse gleich:

$$-\frac{1}{p}\frac{d}{d\zeta}\log\vartheta\Big((u_\mu(o)-p\,u_\mu(\varepsilon)+K_\mu)\Big).$$

Es ist dies jedoch nicht der von RIEMANN selbst dafür gegebene Ausdruck. Der Ausdruck RIEMANN's (Theorie der ABEL'schen Functionen § 25)(*) lautet in unserer Schreibweise

$$-\frac{1}{p}\frac{d}{d\zeta}\log\vartheta\Big((u_\mu(\varepsilon)-p\,u_\mu(o)+K_\mu)\Big).$$

Seine Richtigkeit beruht auf dem Satze, dass die Nullpunkte, welche

$$\vartheta\Big((u_\mu(\varepsilon)-p\,u_\mu(o)+K_\mu)\Big)$$

als Function von z ausser dem $p$fachen Nullpunkte ε besitzt, von der Lage des Punktes ε unabhängig sind. Denn im entgegengesetzten Falle würden sie sich ändern, wenn man den Logarithmus der ϑ-function nach ζ, dem Werte von z in ε differentiirt, also Unstetigkeitspunkte ergeben, wenn man den RIEMANN'schen Ausdruck als Function von z betrachtet.

Der angeführte Satz lässt sich aus unserer Formel für das definitiv normirte Integral zweiter Gattung herleiten, wenn man in diesem den Punkt ε als variabel ansieht. Als Function von ζ wird nämlich $t(o\,|\,\varepsilon)$ unendlich nur in o und den Verzweigungspunkten. (Vergl. unten § 8.) Hätte nun

$$\vartheta\Big((u_\mu(o)-p\,u_\mu(\varepsilon)+K_\mu)\Big)$$

als Function von ζ ausser o selbst noch irgend einen von z oder o abhängigen Nullpunkt ω, so könnte in dem ϑ-Quotienten, welcher in unserer Formel unter dem log-zeichen steht, ω nicht zugleich Nullpunkt des Zählers sein, da dieser von z unabhängig ist; also wäre ω Unstetigkeitspunkt von t als Function von ζ, während dies ausser o nur feste Unstetigkeitspunkte hat. Also wird, als Function von ζ betrachtet,

$$\vartheta\Big((u_\mu(o)-p\,u_\mu(\varepsilon)+K_\mu)\Big)$$

$=o^p$ in o und ausserdem $=o^1$ nur noch in (p^3-p) Punkten E, die für alle Lagen des Punktes o die nämlichen sind.

Der von RIEMANN benutzte Ausdruck

$$\vartheta\Big((u_\mu(\varepsilon)-p\,u_\mu(o)+K_\mu)\Big),$$

(*) In den gesammelten Werken RIEMANN's finden sich an der angegebenen Stelle zwei Druckfehler.

als Function von z betrachtet, wird also $= o^p$ in ε und ausserdem nur noch Null in den nämlichen, festen Punkten E, wie jener.

§ 6.

Wir haben nun für das vollständig normirte Integral zweiter Gattung die folgenden beiden Ausdrücke:

$$(1) \qquad t(o\,|\,\varepsilon) = \psi(\varepsilon\,|\,o) - \frac{1}{\pi i}\sum_{\mu} w'_{\mu}(\varepsilon)\,\mathfrak{A}_{\mu}(o);$$

$$(2) \qquad t(o\,|\,\varepsilon) = \frac{1}{n\,p}\frac{d}{d\zeta}\log\frac{\prod_{g=1}^{n}\vartheta\left(\left(u_{\mu}(\infty_g) - p\,u_{\mu}(\varepsilon) + K_{\mu}\right)\right)}{\left[\vartheta\left(\left(u_{\mu}(o) - p\,u_{\mu}(\varepsilon) + K_{\mu}\right)\right)\right]^{n}};$$

welche beide die Untersuchung von t sowohl als Function von z, wie als Function von ζ gestatten. Der erste dieser beiden Ausdrücke zeigt nun zunächst, dass das vollständig normirte Integral zweiter Gattung $t(o\,|\,\varepsilon)$ algebraische, wie die Fläche T verzweigte Function von ζ ist. Als Function von z ist t Integral einer algebraischen, wie T verzweigten Function. Die erste der vorstehenden Darstellungen scheidet die algebraischen Theile des Ausdrucks vollständig von den transscendenten und zwar in der Weise, dass die einzigen transscendenten Functionen, welche in diesen Ausdruck eingehen, nämlich die p Functionen $\mathfrak{A}_{\mu}(o)$, von der Lage des Unstetigkeitspunktes ε unabhängig sind.

§ 7.

Dieses Resultat fordert zu einer genauen Untersuchung dieser neuen Transscendenten $\mathfrak{A}_{\mu}(o)$ auf. Bevor wir zu diesem Hauptgegenstande der vorliegenden Arbeit übergehen, möge es gestattet sein, zwei Anwendungen der Formel (1) des vorangehenden Abschnitts zu geben.

Die erste Anwendung geht darauf hinaus, an einem einfachen Falle zu zeigen, wie unser Ausdruck für das definitiv normirte Integral $t(o\,|\,\varepsilon)$ die direkte Ueberführung der RIEMANN'schen Darstellung (*) einer algebraischen wie T verzweigten Function durch Integrale zweiter Gattung in die rein algebraische Form bewirkt.

Ist S eine algebraische, wie die Fläche T verzweigte Function $q$ter Ordnung von z, die nur zur ersten Ordnung unendlich wird, und zwar in den Punkten $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_q$, und ist C_k das Gewicht ihrer Unstetigkeit im Punkte ε_k, so müssen die Gewichte den bekannten p Bedingungen genügen:

$$(1) \quad C_1 w'_{\mu}(\varepsilon_1) + C_2 w'_{\mu}(\varepsilon_2) + \ldots\ldots + C_q w'_{\mu}(\varepsilon_q) = o \text{ für } \mu = 1,\ 2 \ldots p,$$

(*) RIEMANN: Theorie der ABEL'schen Functionen § 5.

welche direkt aus der Untersuchung der Function $\int S\,du_\mu$ folgen. Unter Voraussetzung dieser Bedingungen lautet der RIEMANN'sche Ausdruck für S:

$$(2) \qquad S = C_0 + C_1 t(o|\varepsilon_1) + C_2 t(o|\varepsilon_2) + \ldots + C_q t(o|\varepsilon_q),$$

wo C_0 eine neue Constante ist.

Benutzt man hier für t die erstere von unseren beiden Darstellungen, so wird wegen (1) der Faktor von $\mathfrak{A}_\mu(o)$ Null, also ergibt sich sofort:

$$(3) \qquad S = C_0 + C_1 \psi(\varepsilon_1|o) + C_2 \psi(\varepsilon_2|o) + \ldots + C_q \psi(\varepsilon_q|o),$$

womit die Ueberführung aus der transcendenten in die rein algebraische Form geleistet ist.

Würde man die Darstellung von S umgekehrt auf die Formel (3) gründen, so wären die verlangten Unstetigkeitspunkte im Endlichen alle vorhanden, da $\psi(\varepsilon|o)$ als Function von z dort nur in ε unstetig und zwar gleich

$$\frac{1}{z-\zeta} + \text{funct. cont.}$$

wird. Aber in jedem unendlich fernen Punkte der Fläche T wird $\psi(\varepsilon|o)$ als Function von z unendlich zur Ordnung $m-1$ (§ 1.); soll der Ausdruck (3) von S von diesen Unstetigkeiten befreit werden, so gibt dies

$$n(m-1) = p + r + m - 1$$

Bedingungsgleichungen. Aber darunter müssen mindestens $r+m-1$ überzählige Gleichungen sein, denn die vorangehende Untersuchung beweist, dass das nämliche bereits durch die Gleichungen (1) erzwungen wird, deren Anzahl nur gleich p ist.

Wenden wir dieses Resultat auf die Aufgabe an, eine Function S so darzustellen, dass sie von der Ordnung $p+1$ wird, mit den Unstetigkeitspunkten $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ und dass für den Unstetigkeitspunkt ε ihr Gewicht gleich -1 wird, so ergibt sich:

$$S = C_0 - \frac{D}{\Delta},$$

wo D und Δ die Determinanten:

$$D = \begin{vmatrix} \psi(\varepsilon|o) & u'_1(\varepsilon) & u'_2(\varepsilon) \ldots\ldots & u'_p(\varepsilon) \\ \psi(\varepsilon_1|o) & u'_1(\varepsilon_1) & u'_2(\varepsilon_1) \ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_1) \\ \psi(\varepsilon_2|o) & u'_1(\varepsilon_2) & u'_2(\varepsilon_2) \ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_2) \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} \ldots\ldots & \text{—} \\ \psi(\varepsilon_p|o) & u'_1(\varepsilon_p) & u'_2(\varepsilon_p) \ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_p) \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta = \begin{vmatrix} u'_1(\varepsilon_1) & u'_2(\varepsilon_1) \ldots\ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_1) \\ u'_1(\varepsilon_2) & u'_2(\varepsilon_2) \ldots\ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_2) \\ \text{—} & \text{—} \ldots\ldots\ldots & \text{—} \\ u'_1(\varepsilon_p) & u'_2(\varepsilon_p) \ldots\ldots\ldots & u'_p(\varepsilon_p) \end{vmatrix}$$

sind.

Hier kann man $w'_1\ w'_2 \ldots w'_p$ durch ein beliebiges System von p linear unabhängigen Integranden erster Gattung $w'_1\ w'_2 \ldots w'_p$ ersetzen, wie man am bequemsten erkennt, wenn man statt der Gleichungen (1) die gleichbedeutenden

$$C w'_\mu(\varepsilon) + C_1 w'_\mu(\varepsilon_1) + \ldots + C_p w'_\mu(\varepsilon_p) = o, \ (\mu = 1, 2 \ldots p)$$

für $C = -1$ benutzt.

Obiger Ausdruck der Function S zeigt, dass die Punkte $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ in der Fläche T nicht ganz beliebig gewählt werden können; es sind vielmehr für diese Punkte alle diejenigen Lagen auszuschliessen, in denen sie ein Punktsystem erster Gattung bilden, also $\Delta = o$ ist. Wird diese Bedingung durch geeignete Wahl der Punkte ε_1 $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ verletzt, so existirt die Function S entweder gar nicht oder doch nicht für alle Lagen des Punktes ε.

§ 8.

Die zweite Anwendung betrifft das definitiv normirte Integral $t(o|\varepsilon)$ als Function von ζ. Wie wir schon oben sahen, ist $t(o|\varepsilon)$ als solche algebraisch und wie die Fläche T verzweigt. Sie wird unendlich nur, wenn $\psi(\varepsilon|o)$ oder eine der Functionen $w'_\mu(\varepsilon)$ es wird, also in dem Punkte o und in den Verzweigungspunkten.

In o wird:

$$\psi(\varepsilon|o) = -\frac{1}{\zeta - z} + \text{funct. cont.}$$

also:

$$t(o|\varepsilon) = -\frac{1}{\zeta - z} + \text{funct. cont.}$$

In den Verzweigungspunkten wird $t(o|\varepsilon)$ als Function von ζ ebenfalls unstetig, aber so, dass ihr Integral dort stetig bleibt.

In jedem unendlich fernen Punkte von T wird als Function von ζ:

$$w'_\mu(\varepsilon) = o^2; \quad \psi(\varepsilon|o) + \frac{1}{n\zeta} = o^2; \quad \text{also ist dort:}$$

$$t(o|\varepsilon) + \frac{1}{n\zeta} = o^2.$$

Aus letzterer Formel folgt, dass $t(o|\varepsilon)$ als Function von ζ in jedem unendlich fernen Punkte verschwindet; also besitzt $t(o|\varepsilon)$ auch als Function von ζ diejenige Eigenschaft, welche wir bei $t(o|\varepsilon)$ als Function von z behufs definitiver Normirung gefordert haben, dass nämlich die Summe der n Werte, welche die Function im Unendlichen erlangt, gleich Null ist.

§ 9.

Wir stellen nun noch zur bequemern Uebersicht die Eigenschaften unseres definitiv normirten Integrals zweiter Gattung als Function von z und als Function von ζ zusammen.

I. Als Function von z ist $t(o|\varepsilon)$ einwertig in der einfach zusammenhängenden Fläche T' und allenthalben stetig mit Ausnahme des Punktes ε.

In ε ist:

$$t(o|\varepsilon) = \frac{1}{z-\zeta} + \text{funct. cont.}$$

An den Querschnitten ist:

$$\text{an } a_\lambda : \overset{+}{t} - \overset{-}{t} = 0,$$

$$\text{an } b_\lambda : \overset{+}{t} - \overset{-}{t} = -2u'_\lambda(\varepsilon).$$

Die Summe der n Werte, welche die Function im Unendlichen erlangt, ist gleich Null.

II. Als Function von ζ ist $t(o|\varepsilon)$ algebraisch wie die Fläche T verzweigt. Unstetig wird diese Function nur in den Verzweigungspunkten und im Punkte o.

1) In dem Verzweigungspunkte $\sigma = \alpha$, $\zeta = \beta$ ist:

$$t(o|\varepsilon) = \infty, \text{ aber } \lim_{(\zeta-\beta)} t(o|\varepsilon) = 0;$$

2) Im Punkte o ist:

$$t(o|\varepsilon) = \frac{1}{z-\zeta} + \text{funct. cont.}$$

In den unendlich fernen Punkten ist:

$$t(o|\varepsilon) + \frac{1}{n\zeta} = 0^2.$$

Zweite Abtheilung.

Die Functionen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{C}$.

§ 10.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Function:

$$(1) \qquad \mathfrak{A}_\nu(o) = \int \left| \begin{matrix} s \\ b \\ r \end{matrix} \right|_\nu \psi(o' \mid o)\, dz',$$

von der die vollständige Aufklärung über die wahre Natur des Integrals zweiter Gattung

$$(2) \qquad t(o \mid \varepsilon) = \psi(\varepsilon \mid o) - \frac{1}{\pi i} \sum_\mu u'_\mu(\varepsilon)\, \mathfrak{A}_\mu(o)$$

abhängt.

Den Ausgangspunkt dieser Untersuchung bildet die Gleichung (2); im weitern Verlauf derselben wird uns dann die Formel (1) selbst volle Einsicht in das Wesen der betrachteten Function verschaffen.

Seien $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ irgend welche p Punkte der Fläche T, die aber kein Punktsystem erster Gattung bilden dürfen, so dass die Determinante

$$\Delta = \sum \pm u'_1(\varepsilon_1)\, u'_2(\varepsilon_2) \ldots u'_p(\varepsilon_p)$$

von Null verschieden ist.

Nimmt man unter dieser Voraussetzung den Unstetigkeitspunkt ε der Function $t(o \mid \varepsilon)$ nacheinander in diesen p Punkten ε an, so bilden sich gemäss der Formel (2) p Gleichungen, welche die Auflösung nach der Grösse $\mathfrak{A}_\nu$ gestatten.

Man erhält auf diese Weise für die Function $\mathfrak{A}_\nu$ den folgenden Ausdruck:

$$(3) \qquad \mathfrak{A}_\nu(o) = \pi i \sum_{k=1}^{p} \cdot \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial u'_\nu(\varepsilon_k)} \cdot \Big[\psi(\varepsilon_k \mid o) - t(o \mid \varepsilon_k) \Big].$$

Aus dieser Gleichung kann man die Art der Abhängigkeit der Function $\mathfrak{A}_\nu$ von der Lage des Punktes o sehr leicht erkennen. Die Functionen $t(o \mid \varepsilon_k)$ und $\psi(\varepsilon_k \mid o)$ sind, als Functionen von z betrachtet, in der einfach zusammenhängenden Fläche T' einwertig; also ist auch $\mathfrak{A}_\nu(o)$ der Fläche T' einwertig zugeordnet und, wie jene, nur in einzelnen Punkten derselben unstetig.

Was die Unstetigkeiten dieser Function von z betrifft, so folgt: Es haben $\psi(\varepsilon_k \mid o)$ und $t(o \mid \varepsilon_k)$ im Endlichen nur einen Unstetigkeitspunkt, nämlich den Punkt ε_k. In diesem Punkt drücken sich beide aus als

$$\frac{1}{z-\zeta_k} + \text{funct. cont.}$$

Die Differenz beider Functionen ist demnach stetig in ε_k, somit auch $\mathfrak{A}_\nu$, wie sich übrigens von selbst versteht, da $\mathfrak{A}_\nu$ von der Lage dieses Punktes unabhängig ist. Für die Function $\mathfrak{A}_\nu$ folgt daher, dass sie im Endlichen, von den Querschnitten abgesehen, von jeder Unstetigkeit frei ist.

Im Unendlichen bleibt $t(o \mid \varepsilon_k)$ stetig, die algebraische Function $\psi(\varepsilon_k \mid o)$ wird dort auf jedem Blatte $= \infty^{m-1}$, also auch $\mathfrak{A}_\nu(o)$. Diese Unstetigkeiten der verschiedenen Functionen $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_p$ sind in der Weise an einander geknüpft, dass, wie auch immer ein Punkt ε in der Fläche T angenommen werden mag, nach Formel (2) für jeden unendlich fernen Punkt

$$\frac{1}{\pi i} \sum_{\mu=1}^{p} u'_\mu(\varepsilon)\, \mathfrak{A}_\mu(o) = \psi(\varepsilon \mid o) + \text{funct. cont.}$$

wird, wie sich daraus ergibt, dass im Unendlichen

$$t(o \mid \varepsilon) = \text{funct. cont.}$$

ist.

In der einfach zusammenhängenden Fläche T' ist also die Function $\mathfrak{A}_\nu$ einwertig und mit Ausnahme der unendlich fernen Punkte allenthalben stetig. In jedem unendlich fernen Punkte der Fläche wird $\mathfrak{A}_\nu(o)$ zur $(m-1)$ten Ordnung unendlich, und zwar ohne logarithmische Unstetigkeit.

Es bleibt nur noch das Verhalten der Function $\mathfrak{A}_\nu$ an den Querschnitten zu untersuchen. $\psi(\varepsilon_k \mid o)$ hat als algebraische Function von z keine von Null verschiedene Periodicitätsmoduln, wohl aber t. Es ist:

$$\text{an } a_\lambda: \quad \overset{+}{t} - \overset{-}{t} = o; \quad \text{also} \quad \overset{+}{\mathfrak{A}}_\nu - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\nu = o;$$

$$\text{an } b_\lambda: \quad \overset{+}{t} - \overset{-}{t} = -2\, u'_\lambda(\varepsilon);$$

also

$$\text{an } b_\lambda: \quad \overset{+}{\mathfrak{A}}_\nu - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\nu = \frac{2\pi i}{\Delta} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \Delta}{\partial u'_\nu(\varepsilon_k)} u'_\lambda(\varepsilon_k) = 2\pi i \binom{\lambda}{\nu};$$

das heisst:

Am Querschnitt b_ν hat $\mathfrak{A}_\nu$ den Periodicitätsmodul $2\pi i$; an allen übrigen Querschnitten ist der Periodicitätsmodul der Function $\mathfrak{A}_\nu$ gleich Null.

§ 11.

Wir wenden uns nun zu der zweiten Gruppe von Periodicitätsmoduln der Function R, den Functionen $\mathfrak{B}_\nu(o)$; es ist:

$$(1) \qquad \mathfrak{B}_\nu(o) = \int \left| \begin{matrix} q \\ a \\ r \end{matrix} \right|_\nu \psi(o'|o)\, dz'; \quad (\nu = 1, 2 \ldots p).$$

Die Function $\mathfrak{B}_\nu(o)$ ist verknüpft mit den Functionen $\mathfrak{A}$ durch die Gleichung:

$$(2) \qquad \mathfrak{B}_\nu(o) = \frac{1}{2\pi i} \sum_\lambda a_{\lambda\nu}\, \mathfrak{A}_\lambda(o) - 2\, u_\nu(o).$$

Nun ist aber 1) an a_μ:

$$\overset{+}{u}_\nu - \overset{-}{u}_\nu = \binom{\mu}{\nu} \pi i; \quad \overset{+}{\mathfrak{A}}_\lambda - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\lambda = o;$$

also

$$\overset{+}{\mathfrak{B}}_\nu - \overset{-}{\mathfrak{B}}_\nu = -2\pi i \binom{\mu}{\nu}.$$

Ferner ist 2) an b_μ:

$$\overset{+}{u}_\nu - \overset{-}{u}_\nu = a_{\mu\nu}; \quad \overset{+}{\mathfrak{A}}_\lambda - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\lambda = 2\pi i \binom{\lambda}{\mu};$$

also

$$\overset{+}{\mathfrak{B}}_\nu - \overset{-}{\mathfrak{B}}_\nu = \frac{1}{\pi i} \sum_\lambda a_{\lambda\nu} \binom{\lambda}{\mu} 2\pi i - 2\, a_{\mu\nu} = o.$$

Also hat $\mathfrak{B}_\nu(o)$ an dem Querschnitt a_ν den Periodicitätsmodul $-2\pi i$; an jedem andern Querschnitte ist der Periodicitätsmodul gleich Null. Innerhalb der Fläche T' ist $\mathfrak{B}_\nu$ gemäss der Gleichung (2) einwertig und überall mit Ausnahme der unendlich fernen Teile der Fläche T' stetig. In diesen wird $\mathfrak{B}_\nu$ zur $m-1$ ten Ordnung unendlich und zwar ohne logarithmische Unstetigkeit.

§ 12.

Da die Periodicitätsmoduln von $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ constant sind, so sind die Derivirten

$$\frac{d\mathfrak{A}_\nu}{dz}, \qquad \frac{d\mathfrak{B}_\nu}{dz}$$

dieser Functionen wie die Fläche T verzweigt; dieselben werden unstetig nur in den Verzweigungspunkten und in den unendlich fernen Punkten der Fläche T und zwar zu endlichen Ordnungen; sie sind daher algebraische, wie die Fläche T verzweigte Functionen von z und wir haben so den folgenden Satz:

1) Die $2p$ Integrale

$$\mathfrak{A}_\nu(o) = \int \left|\begin{matrix} s \\ b \\ r \end{matrix}\right|_\nu \psi(o'|o)\, dz'$$

und

$$\mathfrak{B}_\nu(o) = \int \left|\begin{matrix} q \\ a \\ r \end{matrix}\right|_\nu \psi(o'|o)\, dz'$$

sind in der einfach zusammenhängenden Fläche T' einwertig und stetig mit Ausnahme der unendlich fernen Punkte, in denen sie zur $m-1$ ten Ordnung unendlich werden, aber von logarithmischen Unstetigkeiten frei sind.

2) Eine jede dieser Functionen hat nur einen von Null verschiedenen Periodicitätsmodul und zwar hat $\mathfrak{A}_\nu$ den Periodicitätsmodul $2\pi i$ an b_ν; $\mathfrak{B}_\nu$ den Periodicitätsmodul $-2\pi i$ an a_ν;

3) Die Derivirten

$$\frac{d\mathfrak{A}_\nu}{dz}, \qquad \frac{d\mathfrak{B}_\nu}{dz}$$

sind algebraische, wie die Fläche T verzweigte Functionen von z.

Die Art der Verteilung der Periodicitätsmoduln lässt sich in der folgenden Tabelle bequem übersehen.

An	b_1	b_2	b_p	a_1	a_2	a_p
$\overset{+}{\mathfrak{A}}_1 - \overset{-}{\mathfrak{A}}_1 =$	$2\pi i$	0	0	0	0 . . .	0
$\overset{+}{\mathfrak{A}}_2 - \overset{-}{\mathfrak{A}}_2 =$	0	$2\pi i$	0	0	0 . . .	0
—	—	— — —	—	—	— — —	—
$\overset{+}{\mathfrak{A}}_p - \overset{-}{\mathfrak{A}}_p$	0	0	$2\pi i$	0	0 . . .	0
$\overset{+}{\mathfrak{B}}_1 - \overset{-}{\mathfrak{B}}_1$	0	0	0	$-2\pi i$	0 . . .	0
$\overset{+}{\mathfrak{B}}_2 - \overset{-}{\mathfrak{B}}_2$	0	0	0	0	$-2\pi i$ . . .	0
—	—	— — —	—	—	— — —	—
$\overset{+}{\mathfrak{B}}_p - \overset{-}{\mathfrak{B}}_p$	0	0	0	0	0 . . .	$-2\pi i$

Dabei ist jetzt hervorzuheben, dass derjenige Querschnitt, an dem eine dieser Functionen den von Null verschiedenen Periodicitätsmodul besitzt, nichts anderes ist, als der Integrationsweg für o' in der obigen Darstellung der Function durch ein bestimmtes Integral; zugleich ist darauf zu achten, dass o' auf dem Wege $(r\,a\,q)_\nu$ den positiven Querschnittrand nicht auf derselben Seite hat, wie auf dem Wege $(r\,b\,s)_\nu$. Kehrt man daher beispielsweise bei den Functionen $\mathfrak{A}_\nu$ die Richtungen der Integration

um, so wechselt auch der Periodicitätsmodul sein Zeichen, nimmt also nun denselben Wert an, wie bei den Functionen $\mathfrak{B}_\nu$.

§ 13.

Dies führt zur Erkenntniss, dass die $2p$ Functionen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ nur Spezialfälle sind einer allgemeinen Integralfunction

$$\mathfrak{C}(o) = \int \psi(o'|o)\, dz',$$

wenn als Integrationsweg ein in sich zurückkehrender, im Uebrigen aber beliebig anzunehmender durch die Fläche T verlaufender Weg r benutzt wird. Wir können dabei den Fall ausschliessen, wo der Weg r die Fläche T in getrennte Stücke zerschneidet, da in diesem Falle das Integral einen constanten und aus den Unstetigkeiten von $\psi(o'|o)$ als Function von z' leicht zu ermittelnden Wert hat, welcher sich übrigens auch aus dem folgenden ergibt (§ 15).

Bei dem Wege r werde nun zunächst die Integrationsrichtung festgelegt und dann als die positive Seite diejenige bezeichnet, welche zur linken der Integrationsrichtung also so zu derselben liegt, wie die positive y axe zur positiven x axe. (Figur auf Seite 8.

Hierdurch ist die Function $\mathfrak{C}$ für jede Lage des Punktes o ausserhalb r einwertig festgelegt, und wir beginnen ihre Untersuchung mit dem Nachweis ihres Verhaltens zu beiden Seiten von r.

Nimmt man zu diesem Zwecke

1) o auf der negativen Seite von r an, oder r so, dass dieser Weg in negativer Richtung an o vorbeiführt, alsdann

2) o auf der positiven Seite von r, oder r so an, dass dieser Weg in positiver Richtung an o vorbeiführt, so ist der Ueberschuss des zweiten Integralswertes über den ersten, also $\overset{+}{\mathfrak{C}} - \overset{-}{\mathfrak{C}}$ gleich dem in positiver Richtung um den Punkt o erstreckten Integral. Nun ist in o:

$$\psi(o'|o) = -\frac{1}{z'-z} + \text{funct. cont.};$$

also ist das positiv um o genommene Integral

$$\int \psi(o'|o)\, dz' = -2\pi i;$$

mithin ist an r:

$$\overset{+}{\mathfrak{C}} - \overset{-}{\mathfrak{C}} = -2\pi i.$$

So sehen wir also folgendes: Wird der Punkt o auf die durch den Ringweg r begrenzte Fläche beschränkt, so ist die Function $\mathfrak{C}(o)$ für jede Lage des Punktes o

innerhalb dieser Fläche einwertig bestimmt, und sie hat an ihrem Integrationswege r den Periodicitätsmodul $-2\pi i$.

Von dieser Function $\mathfrak{C}$ sind $\mathfrak{A}_\nu(o)$, $\mathfrak{B}_\nu(o)$ diejenigen besonderen Fälle, welche sich ergeben, wenn man für r den Querschnitt a_ν, b_ν nimmt und dann die Integrationsrichtung dadurch bestimmt, dass man fordert, der positive Querschnittrand solle auf die linke Seite derselben fallen; daraus ergibt sich, dass man, um eine Function $\mathfrak{C}$ zu erhalten, bei den Functionen $\mathfrak{A}_\nu$ die Integrationsrichtung $(r\,b\,s)_\nu$ umzukehren hat, während bei den Functionen $\mathfrak{B}_\nu$ die Richtung $(r\,a\,q)_\nu$ mit der für $\mathfrak{C}$ festgelegten übereinstimmt.

§ 14.

Die weitere Untersuchung der Functionen $\mathfrak{C}$ lässt sich auf den bemerkenswerten Umstand gründen, dass alle diese Functionen sich durch diejenigen $2p$ linear unabhängigen Functionen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ ausdrücken lassen, auf welche die Theorie der Functionen R und $t(o\,|\,\varepsilon)$ uns geführt hat.

Die Function $R\,(o'\,|\,o)$ ist als Function von z' innerhalb der Fläche T'' einwertig. Durchläuft der Punkt o' den Weg r, so hat hiernach die Function R zu Ende denselben Wert, wie zu Anfang; die Summe aller Zunahmen von R auf diesem Wege ist daher gleich Null. Diese Summe setzt sich aber zusammen aus den stetigen und den plötzlichen Zunahmen von R; die Summe der erstern ist nichts anderes, als das bestimmte Integral $\mathfrak{C}$; ist P die Summe der letztern, so folgt:

$$\mathfrak{C}(o) + P = 0.$$

Aber diese plötzlichen Zunahmen von R, deren Summe P ist, treten ein, so oft o' einen Querschnitt überschreitet. Also ist für die Berechnung von P auf folgendes zu achten: überschreitet o' einen der Schnitte $a_\mu\,b_\mu\,l\,l_k$, so vermehrt sich R plötzlich um den positiv oder negativ genommenen Periodicitätsmodul, je nachdem der Uebergang über den Schnitt von der negativen zur positiven Seite oder in umgekehrter Richtung erfolgte; für einen dieser Schnitte ist also die Summe aller plötzlichen Zunahmen von R das Produkt aus dem Periodicitätsmodul für den Schnitt und der Differenz $g-h$ zweier positiver ganzer Zahlen, von denen g angibt, wie oft der Schnitt von der negativen zur positiven Seite, h, wie oft er in umgekehrter Richtung überschritten wurde.

Nennen wir diese Differenz $g-h$ die Anzahl der positiven Uebergänge über jenen Schnitt, so dass diese Anzahl auch negativ werden kann; ist in diesem Sinne die Anzahl der positiven Uebergänge

$$\begin{aligned} &\text{über } a_\mu \text{ gleich } \alpha_\mu,\\ &\text{» } b_\mu \text{ » } \beta_\mu,\\ &\text{» } l \text{ » } \lambda,\\ &\text{» } l_k \text{ » } \lambda_k, \end{aligned}$$

so folgt:

$$P = \sum_{\mu=1}^{p} \left[\alpha_\mu \mathfrak{A}_\mu(o) + \beta_\mu \mathfrak{B}_\mu(o) \right] + \frac{2\pi i}{n} \cdot \left[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \right] - 2\pi i \cdot \lambda;$$

also haben wir:

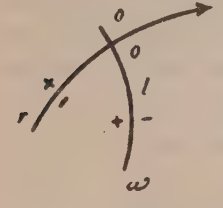
$$(1) \quad \mathfrak{C}(o) + \sum_{\mu=1}^{p} \left[\alpha_\mu \mathfrak{A}_\mu(o) + \beta_\mu \mathfrak{B}_\mu(o) \right] + 2\pi i \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n} - \lambda \right] = 0.$$

Aber diese Formel enthält einen scheinbaren Widerspruch, da jede der Functionen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ und $\mathfrak{C}$ nur einen von Null verschiedenen Periodicitätsmodul hat, nämlich an ihrem eigenen Integrationswege, also dort, wo die andern Functionen sämmtlich den Periodicitätsmodul Null haben. Hieraus folgt nämlich, dass eine identische Gleichung:

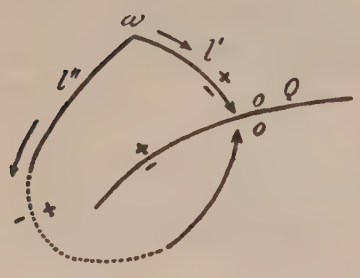
$$\mathfrak{C}(o) + \sum_{\mu} \left[\alpha_\mu \mathfrak{A}_\mu(o) + \beta_\mu \mathfrak{B}_\mu(o) \right] + \gamma = 0,$$

in welcher γ und sämmtliche α_μ, β_μ constant sind, unmöglich ist. Die folgende Untersuchung wird dartun, dass und aus welchen Gründen dies der Formel (1) durchaus nicht widerspricht.

Wir nehmen in der Fläche T die Querschnittbündel a, b, c und die Schnitte $l_1\, l_2 \ldots . l_n$ nach den n unendlich fernen Punkten, sowie den Ringweg r nebst der Integrationsrichtung fest an. Damit ist dann die Bedeutung der Functionen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ und $\mathfrak{C}$ und der Zahlen $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots . \alpha_n$; $\beta_1\ \beta_2 \ldots . \beta_n$; $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots . \lambda_n$ ein für allemal, und zwar unabhängig von der Lage des Punktes o festgelegt. Anders verhält es sich mit der Zahl λ, da der Schnitt l, obgleich er von r beliebig oft geschnitten werden kann, über keinen der Schnitte $a\ b\ l_k$ hinweggehen darf. Soll nun o einmal auf der negativen, dann auf der positiven Seite eines Schnittes Q liegen, so sind in Bezug auf die Anlage des vom gemeinsamen Ausgangspunkte ω sämmtlicher Schnitte nach o zu führenden besondern Schnittes l verschiedene Fälle zu unterscheiden.



1) Ist Q der Integrationsweg r, so kann man den von ω aus nach der negativen Seite von r gezogenen Schnitt l über r hinweg zur positiven Seite fortsetzen. Die Anzahl der positiven Uebergänge von r über l wird dadurch um -1 vermehrt.



2) Sei Q einer der Schnitte $a\ b$ oder l_k; der von ω nach o zu führende Schnitt heisse l' oder l'', jenachdem der Endpunkt o auf der positiven oder der negativen Seite von Q liegt. Da l im gegenwärtigen Falle den Schnitt Q nicht überschreiten darf, ebenso wenig, wie einen der übrigen Schnitte $a\ b$ oder l_k, so müssen l' und l'' so gewählt werden, dass sie zusammen-

genommen einen Ringweg ϱ bilden, der von der negativen auf die positive Seite von Q führt, ohne einen der Schnitte a b l_k zu überschreiten.

Sind nun $\overset{+}{\lambda}$, $\overset{-}{\lambda}$ die Werte von λ, je nachdem o auf der positiven oder der negativen Seite von a liegt, so folgt aus (1) für diesen Schnitt Q:

$$(2) \quad \overset{+}{\mathfrak{C}} - \overset{-}{\mathfrak{C}} + \sum_{\mu=1}^{p} \left\{ \alpha_\mu (\overset{+}{\mathfrak{A}}_\mu - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\mu) + \beta_\mu (\overset{+}{\mathfrak{B}}_\mu - \overset{-}{\mathfrak{B}}_\mu) \right\} - 2\pi i (\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda}) = 0.$$

a) Nun sind an jedem Schnitte l_k die Periodicitätsmoduln der Functionen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$ gleich Null; also ergibt sich, dass an jedem Schnitte l_k

$$\overset{-}{\lambda} - \overset{+}{\lambda} = o$$

ist, d. h. dass die Anzahl der positiven Uebergänge von r über l nicht geändert wird, wenn o von der einen auf die andere Seite von l_k verlegt wird.

b) Ist Q der Schnitt r, so haben wir zu setzen:

$$\overset{+}{\mathfrak{C}} - \overset{-}{\mathfrak{C}} = -2\pi i;$$

die Periodicitätsmoduln aller $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind gleich Null; also folgt aus (2):

$$-2\pi i - 2\pi i (\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda}) = o;$$

$$\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda} = -1.$$

Tritt also o von der negativen Seite von r auf die positive über, so vermehrt sich die Anzahl der positiven Uebergänge von r über l um -1, wie wir schon oben sahen.

c) Ist Q der Querschnitt b_μ, so ist:

$$\overset{+}{\mathfrak{A}}_\mu - \overset{-}{\mathfrak{A}}_\mu = 2\pi i;$$

die übrigen Periodicitätsmoduln sind gleich Null, also folgt:

$$o = 2\pi i . \alpha_\mu - 2\pi i (\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda});$$

$$\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda} = \alpha_\mu .$$

Den Ringschnitt ϱ, der, ebenso wie α_μ, von $\overset{-}{b}_\mu$ nach $\overset{+}{b}_\mu$ führt, bezeichnen wir aus diesem Grunde durch a'_μ. Ebenso wie bei a_μ werde die linke Seite von a'_μ als die positive bezeichnet. Diese Bezeichnungsweise stimmt überein mit der oben für die Ränder von l' festgelegten; bei l'' ist sie die entgegengesetzte. Also ist $\overset{+}{\lambda}$ die Anzahl der positiven Uebergänge von r über das Stück l' von a'_μ; für das andere Stück von a'_μ, nämlich l'' ist sie gleich $-\overset{-}{\lambda}$; daher ist

$$\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda} = \alpha_\mu$$

die Anzahl der positiven Uebergänge von r über a'_μ; sie ist also dieselbe, wie für a_μ.

d) Nimmt man für Q den Querschnitt a_μ, so ist:

$$\overset{+}{\mathfrak{B}}_\mu - \overset{-}{\mathfrak{B}}_\mu = -2\pi i;$$

alle übrigen Periodicitätsmoduln sind gleich Null, also folgt:

$$-2\pi i\beta_\mu - 2\pi i(\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda}) = o;$$

$$\overset{-}{\lambda} - \overset{+}{\lambda} = \beta_\mu.$$

In diesem Falle bezeichnen wir den Ringweg ρ, weil er, wie b_μ, von $\overset{-}{a_\mu}$ nach $\overset{+}{a_\mu}$ führt, durch b'_μ. Bei b'_μ werde ebenso wie bei b_μ nicht die linke Seite, sondern die rechte als positive bezeichnet. Diese Bezeichnung stimmt überein mit der für das Stück l'' desselben festgelegten; für das andere Stück l' ist sie die umgekehrte. Also ist jetzt

$$\overset{-}{\lambda} - \overset{+}{\lambda} = \beta_\mu$$

die Anzahl der positiven Uebergänge von r über b'_μ; diese ist somit dieselbe, wie für den Querschnitt b_μ.

e) An einem Schnitte c sind alle Periodicitätsmoduln gleich Null, also ist dort:

$$\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda} = 0.$$

Der Widerspruch, welcher in der Gleichung (1) scheinbar enthalten war, hat sich also dahin aufgeklärt, dass auch die ganze Zahl λ Periodicitätsmoduln besitzt, nämlich die folgenden:

an	a_μ	b_μ	c_μ	l_k	r
$\overset{+}{\lambda} - \overset{-}{\lambda} =$	$-\beta_\mu$	$+\alpha_\mu$	0	0	-1

Anders ausgedrückt heisst dies folgendes: Die einfach zusammenhängende Fläche T' wird durch den Ringschnitt r in Stücke zerlegt, welche begrenzt sind von Abteilungen der Schnitte a, b, c und r. Innerhalb eines jeden von diesen Stücken der Fläche T hat λ einen unveränderlichen Wert, aber derselbe ändert sich in der vorstehenden Weise von einem Flächenstück zum andern. Ein Widerspruch wäre in der Gleichung (1) wegen der Periodicitätsmoduln der Functionen $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$ und $\mathfrak{C}$ nur dann vorhanden, wenn λ in allen diesen Teilen von T' denselben Wert hätte.

Ausserdem hat sich noch folgendes ergeben:

Werden ohne Aenderung von r die vorhandenen Querschnitte a b stetig abgeändert oder in der oben angegebenen Weise durch andere, a' b' ersetzt, so bleibt die Anzahl der positiven Uebergänge von r für jeden solchen Schnitt ungeändert.

Damit ist die Bedeutung der Gleichung (1) klargelegt, und wir können nun mittelst dieser Gleichung die bereits nachgewiesenen Eigenschaften der Functionen $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$ ohne weiteres auf $\mathfrak{C}$ übertragen. Dann ergibt sich der Satz:

Der Riemann'schen Fläche ist eine Classe von Functionen $\mathfrak{C}$ zugeordnet,

die sich als Integrale über in der Fläche T verlaufende Ringwege r in der Form

$$\mathfrak{C}(o) = \int \psi(o' \mid o)\, dz'$$

darstellen. Jede solche Function von z wird unendlich nur in den unendlich fernen Punkten der Fläche T und zwar zur (m—1)ten Ordnung ohne logarithmische Unstetigkeit; ausserdem wird sie unstetig nur am Integrationswege r und hat dort den constanten Periodicitätsmodul

$$-2\pi i.$$

Aus jeder Function $\mathfrak{C}$ entspringen zwei wie die Fläche T verzweigte Functionen von z, nämlich

$$e^{\mathfrak{C}(o)} \text{ und } \frac{d\mathfrak{C}(o)}{dz},$$

von denen die erstere transscendent, die andere eine algebraische ist.

In dieser Classe gibt es $2p$ linear unabhängige Functionen:

$$-\mathfrak{A}_1, -\mathfrak{A}_2, \ldots -\mathfrak{A}_p; \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_p;$$

bei denen als Integrationswege die Querschnitte benutzt werden; durch diese lassen sich alle andern nach der Formel:

$$(1)\ \mathfrak{C}(o) + \sum_{\mu=1}^{p} \left[\alpha_\mu \mathfrak{A}_\mu(o) + \beta_\mu \mathfrak{B}_\mu(o) \right] + 2\pi i \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n}{n} - \lambda \right] = 0$$

ausdrücken.

Damit ist die Theorie dieser Functionen zum Abschluss gebracht, insofern der genauere Nachweis, wie $\mathfrak{C}$ sich im Unendlichen verhält, aus den Formeln:

$$\frac{1}{\pi i} \sum_{\mu=1}^{p} u'_\mu(\varepsilon)\, \mathfrak{A}_\mu(o) = \psi(\varepsilon \mid o) + \text{funct. cont. (§ 10.)}$$

und

$$\mathfrak{B}_\mu(o) = \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu} \mathfrak{A}_\lambda(o) - 2\, u_\mu(o) \text{ (§ 3. C)}$$

durch Zusammensetzung folgt.

§ 15.

Wir wollen nun noch mit wenigen Worten einen im Vorangehenden unberücksichtigt gelassenen Fall erledigen, den nämlich, wo der Ringweg r die Fläche T in getrennte Stücke zerschneidet. Sei T_1 dasjenige Stück, um welches in positiver Richtung integrirt werden soll. Dann ist nach dem Satze Cauchy's das um T_1 genommene Integral,

$$\mathfrak{C} = \int dR(o' \mid o),$$

gleich dem Produkt aus $2\pi i$ in die Summe der Gewichte aller logarithmischen Unstetigkeiten von R in T_1. Wenn zu T_1 n_1 unendlich ferne Punkte von T gehören, so folgt:

$$\mathfrak{C} = n_1 \cdot \frac{2\pi i}{n},$$

falls der Punkt o ausserhalb T_1, und

$$\mathfrak{C} = n_1 \cdot \frac{2\pi i}{n} - 2\pi i,$$

wenn der Punkt o innerhalb T_1, also auf der positiven Seite von r liegt.

An r ist der erstere Wert gleich $\bar{\mathfrak{C}}$, der letztere gleich $\overset{+}{\mathfrak{C}}$, also folgt dort:

$$\overset{+}{\mathfrak{C}} - \bar{\mathfrak{C}} = -2\pi i.$$

Da $\mathfrak{C}$ innerhalb und ausserhalb T_1 constant ist, so sind in der allgemeinen Formel alle α_μ und β_μ Null; aus (1) folgt für beide Fälle:

$$\mathfrak{C}(o) = 2\pi i \cdot \left[\lambda - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n}\right],$$

nur dass im ersten Falle $\lambda = \bar{\lambda}$, im zweiten Falle $\lambda = \overset{+}{\lambda}$ und ausserdem $\bar{\lambda} - \overset{+}{\lambda} = 1$ zu setzen ist.

Dass die Zahlen α_μ, β_μ im gegenwärtigen Falle gleich Null sind, ergibt sich auch daraus, dass ein positiver Uebergang von r über a_μ das nämliche ist, wie ein negativer von a_μ über r, also ist $-\alpha_\mu$ die Anzahl der positiven Uebergänge von a_μ über r, das heisst die Anzahl der Fälle, wo a_μ, den Rand r von T_1 überschreitend, in T_1 eintritt, vermindert um die Anzahl der Austrittsstellen. Folgt man aber dem Wege a_μ, indem man an einer bestimmten Stelle innerhalb T_1 beginnt, so ist klar, weil man wieder in den Ausgangspunkt zurückkehren muss, dass die Anzahl der Austrittsstellen aus T_1 der Anzahl der Eintrittsstellen gleich ist, also ist $\alpha_\mu = o$; ebenso folgt: $\beta_\mu = o$, was noch verificirt werden sollte.

Lebenslauf.

Ich, Michael Ludwig Otto Pauls, bin geboren am 8. August 1857 zu Montjoie in der Rheinprovinz, woselbst mein im Jahre 1863 verstorbener Vater Arzt war. Nachdem ich in der Elementarschule und der höhern Bürgerschule meines Heimatsortes den ersten Unterricht erhalten hatte, wurde ich im Oktober 1872 in die Obertertia der Realschule erster Ordnung zu Aachen aufgenommen, welche Anstalt ich im Herbste 1877 mit dem Zeugniss der Reife verliess, um mich zunächst in Bonn während dreier Semester dem Studium der Mathematik zu widmen. Im April 1879 liess ich mich an der Strassburger Universität immatrikuliren und setzte hier während fünf weiterer Semester meine Studien fort.

Collegien hörte ich in Bonn bei den Herren Professoren:

Clausius, Delius, Kekulé, Ketteler, Kortum, Lipschitz, Schaarschmidt, Schönfeld, Troschel, Willmanns;

in Strassburg bei den Herren Professoren:

de Bary, Christoffel, Groth, Kundt, Liebmann, Netto, Reye, Schmidt.

Allen den genannten Herren, insbesondere Herrn Professor Christoffel spreche ich an dieser Stelle für das rege Interesse an dem Fortgange meiner Studien den herzlichsten Dank aus.